XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Menor

Primera prueba Final, 29 de Octubre de 2015

Problema 1. Sobre el plano, hay dibujados un paralelogramo $\mathcal{P}$ y un punto X fuera de $\mathcal{P}$. Utilizando solamente una regla sin graduar determine el punto W que es simétrico de X con respecto al centro O de $\mathcal{P}$.

Aclaración: Una regla sin graduar es un artefacto que permite trazar rectas entre dos puntos del plano, y no puede medir distancias. El punto W es simétrico de X con respecto a O si está sobre la recta XO, es distinto de X y la distancia entre O y X es igual a la distancia entre W y O.

Problema 2. Considere un triángulo $\triangle ABC$ y un punto D en el segmento BC. Los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son semejantes de razón $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Determine los ángulos del triángulo $\triangle ABC$.

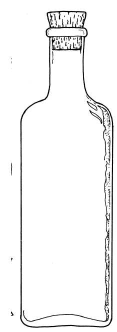
Problema 3. Considere una recta horizontal L con 20 puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ distintos en ella. Para cada par de puntos P_i, P_j se traza un círculo de manera tal que el segmento P_iP_j es un diámetro. Determine la cantidad máxima de intersecciones entre círculos que pueden ocurrir, considerando solo aquellas que ocurren estrictamente arriba de L.

Tiempo: 3 horas.

XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Menor

Segunda prueba Final, 30 de Octubre de 2015

Problema 4. La botella de la figura tiene una base circular, y la parte baja de ella es un cilindro perfecto. La parte superior tiene una forma no muy bien definida. Con la ayuda de una regla graduada (con la que puede medir distancias), y una llave de agua, proponga un método que le permita estimar de manera muy precisa el volumen total de la botella.



Problema 5. En un círculo se inscribe un cuadrilátero $ABCD$. Suponga que $|DA| = |BC| = 2$ y $|AB| = 4$. Sea E el punto de intersección de las rectas BC y DA. Suponga que $\angle AEB = 60^o$ y que $|CD| < |AB|$. Calcule el radio del círculo.

Problema 6. Determine todos los triples de números enteros positivos (p, n, m), con p un número primo, que satisfacen la ecuación:

$$p^m - n^3 = 27.$$

Tiempo: 3 horas.

XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Mayor

Primera prueba Final, 29 de Octubre de 2015

Problema 1. Sobre el plano, hay dibujados un paralelogramo $\mathcal{P}$ y un punto X fuera de $\mathcal{P}$. Utilizando solamente una regla sin graduar determine el punto W que es simétrico de X con respecto al centro O de $\mathcal{P}$.

Aclaración: Una regla sin graduar es un artefacto que permite trazar rectas entre dos puntos del plano, y no puede medir distancias. El punto W es simétrico de X con respecto a O si está sobre la recta XO, es distinto de X y la distancia entre O y X es igual a la distancia entre W y O.

Problema 2. Encuentre todos los números primos que no poseen un múltiplo que termine en 2015.

Problema 3. Considere una recta horizontal L con $n \geq 4$ puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ distintos en ella. Para cada par de puntos P_i, P_j se traza un círculo de manera tal que el segmento P_iP_j es un diámetro. Determine la cantidad máxima de intersecciones entre círculos que pueden ocurrir, considerando solo aquellas que ocurren estrictamente arriba de L.

Tiempo: 3 horas.

XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Mayor

Segunda prueba Final, 30 de Octubre de 2015

Problema 4. Encuentre la cantidad de números distintos de la forma $\left\lfloor \frac{i^2}{2015} \right\rfloor$, con $i = 1, 2, ..., 2015$

Aclaración: Para un número real r se define la parte entera $\lfloor r \rfloor$ como el mayor número entero que es menor o igual que r.

Problema 5. En un círculo se inscribe un cuadrilátero $ABCD$. Suponga que $|DA| = |BC| = 2$ y $|AB| = 4$. Sea E el punto de intersección de las rectas BC y DA. Suponga que $\angle AEB = 60^o$. Calcule el radio del círculo.

Problema 6. Sobre el plano, se dibuja continuamente una curva cerrada con auto intersecciones simples. En el plano quedan determinadas de esta forma un número finito de regiones disjuntas. Demuestre que se puede pintar totalmente cada una de estas regiones ya sea de blanco o de azul, de manera tal que cada dos regiones que compartan un segmento de curva en sus bordes, siempre tienen colores distintos.

Aclaración: una auto intersección es simple si al mirar un disco muy pequeño alrededor de ella, la curva luce como un cruce $\times$.

Tiempo: 3 horas.